Münster.1928,№ 36

Phil. Diss.

Mathematik

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE LIESCHE F_2

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

DER

PHILOSOPHISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER WESTFÄLISCHEN WILHELMS-UNIVERSITÄT

ZU

MÜNSTER IN WESTFALEN

VORGELEGT VON

ANNA SCHMÜCKER

AUS ST. TÖNIS

MONTANUS & EHRENSTEIN, BARMEN-WICHL.

1928

Tag der mündlichen Prüfung:
23. Juli 1926.

Dekan:
Herr Prof. Dr. W. Benecke.

Referent:
Herr Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. v. Lilienthal.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinen Eltern

Vorliegende Arbeit wurde durch Herrn Geheimen Regierungsrat, Professor, Dr. R. von Lilienthal angeregt und in liebenswürdigster Weise gefördert. Diesem meinem verehrten Lehrer, der durch seine Vorlesungen und Seminare in mir ein lebhaftes Interesse für Mathematik weckte, spreche ich an dieser Stelle herzlichen Dank aus.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung und Übersicht 7

I. Untersuchungen über die Liesche F_2 eines Flächenpunktes unter Benutzung von Ableitungen nach den Parametern u und v.

§ 1. Die Asymptotenlinien als Parameterlinien 11

§ 2. Bestimmung der Lieschen F_2 eines Flächenpunktes 13

§ 3. Die quadratische Gleichung der Lieschen F_2 bezogen auf das x,y,z-Koordinatensystem 18

§ 4. Eine Demoulinsche Bestimmung der Lieschen F_2 eines Flächenpunktes 20

§ 5. Die Gleichung der Lieschen F_2 bezogen auf das aus den Tangenten an die Asymptotenkurven und der Flächennormale im fraglichen Punkte bestehende Dreikant. Übereinstimmung mit einem Scheffersschen Resultat 22

§ 6. Die Bedingung für das Auftreten eines Paraboloids als Liescher F_2 24

II. Untersuchungen über die Liesche F_2 eines Flächenpunktes unter Anwendung von Ableitungen nach Bogenlängen.

§ 7. Zweck der Untersuchungen und Angabe der Voraussetzungen, unter denen sie geführt werden 26

§ 8. Die Fläche zweiter Ordnung, die von den Tangenten der nicht mit den Erzeugenden zusammenfallenden Asymptotenlinien einer windschiefen geradlinigen Fläche längs einer regulären Erzeugenden derselben gebildet wird. Herleitung einer von G. Scheffers zuerst bewiesenen Ergänzung des Lieschen Satzes 30

§ 9. Geometrische Bedeutung der Größen $h_1 = T_2 \cdot \sin\varphi$ und $h_2 = T_1 \cdot \sin\varphi$ 36

§ 10. Die Gleichung der Lieschen F_2 bezogen auf die Tangenten der Krümmungslinien und die Flächennormale. Anwendung auf Flächen konstanter negativer Krümmung, insbesondere die Pseudosphäre 38

§ 11. Bedingung für das Auftreten eines Paraboloids als Liescher F_2 . 43

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546201_0032

Einleitung und Übersicht.

Nimmt man auf einer negativ gekrümmten Fläche einen Punkt P an, durch welchen die Asymptotenlinien unter einem von Null verschiedenen Winkel gehen, und legt auf einer dieser Kurven durch ihn und zwei benachbarte Punkte P_1 und P_2 die Tangenten an die Asymptotenlinien der anderen Schar, so erhält man drei zueinander windschiefe und damit eine Fläche zweiter Ordnung bestimmende Geraden. Diese Fläche zweiter Ordnung gelangt, wenn P_1 und P_2 sich mehr und mehr dem Punkte P nähern, in eine Grenzform, die unabhängig davon ist, welche der beiden Asymptotenlinien man zur Ausgangskurve gemacht hat. Das ist der Inhalt eines in der Literatur über diese Fläche häufig genannten, von Lie herrührenden Satzes[1].

Eine andere Konstruktion der Lieschen Fläche tritt bei E. J. Wilczynski[2] und A. Demoulin[3] sowie G. M. Green[4] auf. Der Gedankengang ist hier der folgende: jedem Punkte P eines negativ gekrümmten Flächenstücks lassen sich zwei windschiefe Flächen S_1 und S_2 dadurch zuordnen, daß man die Tangenten an die Asymptotenlinien der einen Schar längs der durch P gehenden Asymptotenkurve der anderen Schar zieht; die Tangenten nun an die im allgemeinen krummlinigen Asymptotenlinien dieser Regelflächen in den Punkten ihrer durch den Punkt P gehenden Erzeugenden bilden die beiden Geradenscharen der den Flächenpunkt berührenden Lieschen F_2.

---

[1] S. Lie: Gesammelte Abhandlungen. Bd. 3: Abhandlungen zur Theorie der Differentialgleichungen. 1. Abtlg., hrsg. von F. Engel, Leipzig 1922, S. 718 und S. 537.

[2] E. J. Wilczynski: Projective differential geometry of curved surfaces. Second memoir: Transactions of the American Mathematical Society, 9 (1908), § 2, S. 80—83.

[3] A. Demoulin: Sur quelques propriétés des surfaces courbes. Comptes Rendus der Pariser Akademie, 147 (1908), S. 565; hier zitiert als „C. R.".

[4] G. M. Green: Memoir on the general theory of surfaces and rectilinear congruences. Trans. Amer. Soc., 20 (1919), § 7, S. 96—99, insbes. S. 97.

Die Tatsache, daß beide Wege zu einer und derselben Fläche zweiter Ordnung führen, ist offenbar darin begründet, daß jede Asymptotenlinientangente einer windschiefen geradlinigen Fläche drei konsekutive Erzeugende der Fläche schneidet.

Die analytische Bestimmung der Lieschen F_2 eines Flächenpunktes in Anlehnung an eines der genannten Erzeugungsverfahren hat — je nach dem Standpunkt, den man der Aufgabe gegenüber einnahm — mannigfache Gestaltung erfahren. A. Demoulin, P. Franck und G. Scheffers[5] haben sie vom Standpunkte der von Monge und Gauss begründeten Flächentheorie geführt. E. J. Wilczynski und G. M. Green[6] liefern sie als Vertreter der projektiven Differentialgeometrie mit Hilfe homogener Koordinaten; homogene Koordinaten sind auch F. Engel[7] das gegebene Mittel zum Beweise des erwähnten Lieschen Satzes. In affingeometrischer Beleuchtung erscheint dieser Satz endlich in einer neueren Arbeit von P. Franck[8].

Die Untersuchungen zur Beantwortung der Frage, wann die Liesche Fläche ein Paraboloid bzw. Hyperboloid ist, sind hauptsächlich mit Hilfe der gewöhnlichen Differentialgeometrie geführt worden. A. Demoulin[9] hat zuerst durch geometrische Überlegungen die Bedingung für das Auftreten von Lieschen Paraboloiden: $\frac{\partial a_{11}}{\partial v} + a_{12} \cdot a_{31} = 0$ [10] gefunden und die Zugehörigkeit „paraboloidischer“[11]

---

[5] a) A. Demoulin, siehe Anm. 3.
b) P. Franck: Über die Liesche F_2 eines Flächenpunktes. Sitzber. der Berl. Math. Ges., 13 (1914), S. 110—127.
c) G. Scheffers: Über zwei mit einem Flächenpunkt verknüpfte Flächen zweiter Ordnung. Sitzber. der Berl. Math. Ges., 14 (1915), S. 68—79.

[6] Siehe Anm. 3 u. 4.

[7] F. Engel: Siehe Anm. 1: S. 753—754 oder Math. Zeitschr., 11 (1921), S. 301—305.

[8] P. Franck: Die Asymptotenebenen eines Flächenpunktes und seine Liesche F_2. Math. Zeitschr., 11 (1921), S. 289—301, insbes. § 2.

[9] A. Demoulin: Sur la quadrique de Lie. C. R., 147 (1908), S.493—496.

[10] $a_{11} \equiv \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}$, $a_{12} \equiv \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}$, $a_{31} \equiv \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}$.

[11] „Paraboloidisch“ ist eine von P. Franck geprägte Bezeichnung; siehe seine Abhandlung: Über paraboloidische Flächen. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 23 (1914), S. 49—53, insbes. S. 49.

Flächen zu den sog. Flächen erster Klasse[12] erkannt. In seiner Arbeit « Sur les surfaces réglées[13] » bemerkt er, daß von den Regelflächen nur diejenigen mit Leitebene paraboloidisch sind. Von P. Franck wurde obige Bedingung auf analytischem Wege später in anderer Form[14] gewonnen und in verschiedene weitere Fassungen[15] gebracht. Ihm verdanken wir auch eine direkte Herleitung dieser Forderung, die durch den Schluß auf die geometrische Eigentümlichkeit paraboloidischer Flächen ihren besonderen Wert erhält[16]. Erwähnt möge an dieser Stelle noch werden seine explizite Darstellung paraboloidischer Flächen[17]. L. Berwald[18] drückte die fragliche Bedingung in Größen der affinen Flächentheorie aus und deckte dabei den Zusammenhang zwischen Liescher F_2 und der mittleren Affinkrümmung im betrachteten Punkte der ursprünglichen Fläche auf.

Nachstehende Arbeit bietet eine Ergänzung zu den eben berührten Gegenständen und zwar vorzüglich in methodischer Hinsicht. Der erste Abschnitt bringt unter Voraussetzung der Gaussschen Flächendarstellung und der besonderen Annahme der Asymptotenlinien als Parameterlinien eine Bestimmung der Lieschen F_2 eines Flächenpunktes nach der zweiten Erzeugungsweise sowohl in parametrischer Form als auch durch eine einzige Gleichung zweiter Ordnung. Nachdem auf ein verwandtes Bestimmungsverfahren von A. Demoulin eingegangen worden ist, wird der analytische Nachweis der Identität der Ergebnisse der eingangs bezeichneten Flächenkonstruktionen erbracht und die bekannte Bedingung für einen paraboloidischen Punkt aufgestellt. Der zweite Teil enthält die Lösung der im ersten Abschnitt behandelten Aufgaben unter Annahme allgemeiner Parameter mit Hilfe der Methode der Ableitungen nach Bogenlängen und unter besonderer Berücksichtigung

---

[12] Vgl. G. Darboux: Leçons sur la théorie générale des surfaces, 3. Bd., Paris 1894, S. 368.

[13] C.R., 146 (1908), S. 1381—1384.

[14] P. Franck: Zur Diskussion der Lieschen F_2. Mitteil. Math. Ges. Hamburg, 5 (1914), S. 113—129, insbes. S. 117.

[15] a) P. Franck: siehe Anm. 11; b) Derselbe, ebenda S. 343—352.

[16] Siehe Anm. 15b.

[17] Siehe Anm. 15b.

[18] L. Berwald: Liesche F_2, Affinnormale und mittlere Affinkrümmung. Math. Zeitschr., 8 (1920), S. 63—78, insbes. S. 73—74 u. S. 78.

der windschiefen Regelflächen. Dabei kommen gewisse Größen h_1 und h_2 zur Anwendung, auf deren geometrische Bedeutung eingegangen wird. Es ergibt sich eine unmittelbare Anwendung der gewonnenen Ergebnisse auf Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes.

I. Untersuchungen über die Liesche F_2 eines Flächenpunktes bei alleiniger Benutzung von Ableitungen nach den Parametern u und v.

§ 1. Die Asymptotenlinien als Parameterlinien.

Der eigentlichen Abhandlung über den oben angegebenen Gegenstand schicken wir im ersten Paragraphen einige später benötigte Formeln voraus.

Ausgangspunkt unserer Untersuchung ist ein Flächengebiet mit reellen Asymptotenlinien. Wir wählen die analytische Darstellung dieses Gebietes derart, daß die Asymptotenlinien die Parameterkurven sind. Dann verschwinden die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L und N, sodaß die partiellen Differentialgleichungen der Fläche[19] die Form annehmen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &(a)\quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a_{11}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + a_{12}\cdot\frac{\partial x}{\partial v},\\ &(b)\quad \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = a_{21}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + a_{22}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + M\cdot X,\\ &(c)\quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = a_{31}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + a_{32}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}. \end{aligned}$$

Bilden wir nun

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right),$$

indem wir die erste Gleichung des Systems nach v, die zweite nach u differentieren und beide Ausdrücke einander gleichsetzen, so kommt:

---

[19] R. von Lilienthal: Vorlesungen über Differentialgeometrie II_1, Leipzig 1913 (wird mit „v. L" II_1 zitiert), S. 256 (19). Die in obigen Gleichungen auftretenden „$a_{\lambda\mu}$" bedeuten die Christoffelschen Symbole; es ist

$$a_{11} \equiv \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\},\ a_{12} \equiv \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\},\ a_{22} \equiv \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\},\ a_{31} \equiv \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\},\ a_{32} \equiv \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}.$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\left(a_{12}\cdot a_{31}-a_{22}\cdot a_{21}+\frac{\partial a_{11}}{\partial v}-\frac{\partial a_{21}}{\partial u}-\frac{F\cdot M^2}{\Delta^2}\right)+\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\left(a_{11}\cdot a_{22}+a_{12}\cdot a_{32}\right.$$

$$\left.-a_{21}\cdot a_{12}-a_{22}^2+\frac{\partial a_{12}}{\partial v}-\frac{\partial a_{32}}{\partial u}+\frac{E\cdot M^2}{\Delta^2}\right)-X\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial u}+[a_{22}-a_{11}]\cdot M\right)=0,$$

wo $\Delta^2 = E\cdot G - F^2$ bedeutet. Ebenso erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\left(a_{11}\cdot a_{31}-a_{22}\cdot a_{21}+\frac{\partial a_{11}}{\partial v}-\frac{\partial a_{21}}{\partial u}-\frac{F\cdot M^2}{\Delta^2}\right)+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\left(a_{11}\cdot a_{22}+a_{12}\cdot a_{32}\right.$$

$$\left.-a_{21}\cdot a_{12}-a_{22}^2+\frac{\partial a_{12}}{\partial v}-\frac{\partial a_{32}}{\partial u}+\frac{EM^2}{\Delta^2}\right)-Y\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial u}+[a_{22}-a_{11}]\cdot M\right)=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\left(a_{11}\cdot a_{31}-a_{22}\cdot a_{21}+\frac{\partial a_{11}}{\partial v}-\frac{\partial a_{21}}{\partial u}-\frac{F\cdot M^2}{\Delta^2}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\left(a_{11}\cdot a_{22}+a_{12}\cdot a_{32}\right.$$

$$\left.-a_{21}\cdot a_{12}-a_{22}^2+\frac{\partial a_{12}}{\partial v}-\frac{\partial a_{32}}{\partial u}+\frac{EM^2}{\Delta^2}\right)-Z\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial u}+[a_{22}-a_{11}]\cdot M\right)=0.$$

Unter Voraussetzung eines regulären Bereichs um den Punkt (x, y, z) ist die Determinante $\left|\frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial x}{\partial v}\ X\right|$ ungleich Null, weshalb sämtliche Klammerausdrücke verschwinden. Auf gleiche Weise führt die Berechnung von

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)\ \text{usw.}$$

zu den Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\left(a^2{}_{21}+a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{31}-a_{21}\cdot a_{32}+\frac{\partial a_{21}}{\partial v}-\frac{\partial a_{31}}{\partial u}-\frac{G\cdot M^2}{\Delta^2}\right)$$

$$+\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\left(a_{21}\cdot a_{22}-a_{31}\cdot a_{12}+\frac{\partial a_{22}}{\partial v}-\frac{\partial a_{32}}{\partial u}+\frac{F\cdot M^2}{\Delta^2}\right)$$

$$-X\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial v}+[a_{32}-a_{31}]\cdot M\right)=0\ \text{usw.}$$

In ihnen sind wiederum sämtliche Klammerausdrücke Null.

Aus den Bedingungen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial a_{11}}{\partial v} - \frac{\partial a_{21}}{\partial u} - a_{21}\cdot a_{22} + a_{12}\cdot a_{31} - \frac{F\cdot M^2}{\Delta^2} = 0,\\ &\frac{\partial a_{32}}{\partial u} - \frac{\partial a_{22}}{\partial v} - a_{21}\cdot a_{22} + a_{12}\cdot a_{31} - \frac{F\cdot M^2}{\Delta^2} = 0 \end{aligned}$$

folgt:

$$(2')\qquad \frac{\partial a_{11}}{\partial v} - \frac{\partial a_{21}}{\partial u} = \frac{\partial a_{32}}{\partial u} - \frac{\partial a_{22}}{\partial v}.$$

Nun besteht aber gemäß folgender Gleichungen, die ebenso wie (2) „Fundamentalgleichungen unserer Fläche" sind,

$$(3)\qquad \frac{\partial \log M}{\partial u} = a_{11} - a_{22} \text{ und } \frac{\partial \log M}{\partial v} = a_{32} - a_{21},$$

die Beziehung:

$$(3')\qquad \frac{\partial (a_{11} - a_{22})}{\partial v} = \frac{\partial (a_{32} - a_{21})}{\partial u};$$

sie ergibt zusammen mit Gleichung (2'):

$$(4)\qquad \frac{\partial a_{11}}{\partial v} = \frac{\partial a_{32}}{\partial u}.$$

Dies ist eine für Flächen, deren Parameternetz aus Asymptotenlinien besteht, charakteristische Gleichung[20].

§ 2. Bestimmung der Lieschen F_2 eines Flächenpunktes.

Gegeben sei ein negativ gekrümmtes, reelles, reguläres Flächenstück mit den Gleichungen: $x=f_1(u, v)$, $y=f_2(u, v)$, $z=f_3(u, v)$, und die Parameterlinien mögen mit den Asymptotenkurven zusammenfallen. Wir bestimmen nun die Liesche F_2 eines Punktes dieser Fläche, indem wir uns an die eingangs gekennzeichnete Wilczynskische Erzeugungsweise halten.

Die Tangenten der Kurven $v = \text{const.}$ längs einer Kurve $u = \text{const.}$ bilden eine geradlinige Fläche S_1, welche die Fläche (x, y, z) in

[20] L. Bianchi: Vorlesungen über Differentialgeometrie. Dtsche. Übers. von M. Lukat, Leipzig 1910, S. 126 (12) u. S. 128 (a); zitiert als „L. Bianchi".

den Punkten der fraglichen Asymptotenlinie berührt; sie wird dargestellt durch die Gleichungen:

$$\xi_1 = x + h \cdot \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \eta_1 = y + h \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \zeta_1 = z + h \cdot \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Dabei sei $h = \bar{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}}$. Fassen wir die Koordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 als Funktionen von v und $\bar{h}$ auf, so liefern die Gleichungen zu jedem festen Wert von v bei variablem $\bar{h}$ eine bestimmte Erzeugende; jedem konstanten $\bar{h}$ ordnen sie hingegen bei veränderlichem v eine bestimmte Kurve zu, die im Abstande $\bar{h}$ von der Parameterlinie u-const. der Ausgangskurve verläuft.

Im folgenden sollen die Flächenkoordinaten als Funktionen der Veränderlichen v und h angesehen werden. Es ist dann:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} + h \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}; \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial h} = \frac{\partial x}{\partial u}; \qquad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + h \cdot \frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2};$$

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial h \partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}; \qquad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial h^2} = 0 \text{ usw.}$$

Setzt man noch abkürzend; $\Delta_1^2 = E_1 \cdot G_1 - F_1^2$, indem man die Fundamentalgrüßen $E_1 \ldots N_1$ der geradlinigen Fläche, die Fundamentalgrößen $E \ldots N$ der Ausgangsfläche zuweist, so wird:

[21]

$$\Delta_1 \cdot L_1 = \sum \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial h^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial h} \cdot \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial \zeta_1}{\partial h} \right) = 0,$$

$$\Delta_1 \cdot M_1 = \sum \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial h \partial v} \cdot \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial h} \cdot \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial v} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial h} \right) = \Delta \cdot M,$$

$$\Delta_1 \cdot N_1 = \sum \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial h} \cdot \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial \zeta_1}{\partial h} \right) = h^2 \cdot \sum \frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2}$$

$$\cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \right) + h \cdot \left(\sum \frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2} \left[\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right] \right.$$

$$\left. + \sum \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \cdot \left[\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \right] \right) + \sum \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right).$$

[21] G. Scheffers: Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, S. 106 (9).

Nun ist aber voraussetzungsgemäß: $\sum \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) = 0;$

hieraus ergibt sich durch Differentation nach u für den Koeffizienten von h in dem Ausdruck für $\Delta_1 \cdot N_1$:

$$\sum \frac{\partial^3 x}{\partial u \, \partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) + \sum \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u \, \partial v} \right) = 0.$$

Der Koeffizient von h^2 läßt sich in folgender Weise vereinfachen; es ist:

$$\sum \frac{\partial^3 x}{\partial u \, \partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u \, \partial v} \right) = a_{22} \cdot \Delta \cdot \sum \frac{\partial^3 x}{\partial u \, \partial v^2} \cdot X$$

$$+ \frac{M}{\Delta} \cdot \sum \frac{\partial^3 x}{\partial u \, \partial v^2} \cdot \left(F \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - E \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right).$$

Aus der partiellen Differentalgleichung der Fläche (1b) S. 11 folgt aber: $\sum \frac{\partial^3 x}{\partial u \, \partial v^2} \cdot X = a_{21} \cdot M + \frac{\partial M}{\partial v}$ und gemäß (3) Seite 13:

$\sum \frac{\partial^3 x}{\partial u \, \partial v^2} \cdot X = a_{32} \cdot M$; weiter wird: $\sum \frac{\partial^3 x}{\partial u \, \partial v^2} \cdot \left(F \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - E \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right)$

$= - \Delta^2 \cdot \left(\frac{\partial a_{32}}{\partial u} + a_{31} \cdot a_{12} + a_{22} \cdot a_{32} \right)$, sodaß $\sum \frac{\partial^3 x}{\partial u \, \partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} \right.$

$\left. - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u \, \partial v} \right) = - \Delta \cdot M \cdot \left(\frac{\partial a_{32}}{\partial u} + a_{31} \cdot a_{12} \right)$ und damit

$$\Delta_1 \cdot N_1 = - h^2 \cdot \Delta \cdot M \cdot \left(\frac{\partial a_{32}}{\partial u} + a_{31} \cdot a_{12} \right).$$

Die Differentalgleichung der im allgemeinen krummlinigen Asymptotenkurven ergibt sich in der Form:

$$2 \cdot dh - h^2 \cdot \left(\frac{\partial a_{32}}{\partial u} + a_{31} \cdot a_{12} \right) \cdot dv = 0.$$

Die Richtungskosinus der Tangente einer Kurve dieser Schar sind proportional

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial a_{32}}{\partial u} + a_{31} \cdot a_{12}\right) \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{\partial x}{\partial v} + h \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} \text{ usw.}$$

Die Tangenten unserer Asymptotenlinien lassen sich mithin durch die Gleichungen darstellen:

$$x_1 = x + h \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + t \cdot \left\{\frac{\partial x}{\partial v} + h \cdot \left(a_{21} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + a_{22} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + M \cdot X\right) + \frac{h^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial a_{32}}{\partial u} + a_{31} \cdot a_{12}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}\right\},$$

$$y_1 = y + h \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + t \cdot \left\{\frac{\partial y}{\partial v} + h \cdot \left(a_{21} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + a_{22} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + M \cdot Y\right) + \frac{h^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial a_{32}}{\partial u} + a_{31} \cdot a_{12}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\right\},$$

$$z_1 = z + h \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + t \cdot \left\{\frac{\partial z}{\partial v} + h \cdot \left(a_{21} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + a_{22} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} + M \cdot Z\right) + \frac{h^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial a_{32}}{\partial u} + a_{31} \cdot a_{12}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial u}\right\}.$$

Werden in diesen Gleichungen t und h als Parameter aufgefaßt, u und v aber konstant angenommen, so bestimmen sie eine Fläche, die von den Tangenten der betrachteten Asymptotenlinien längs der Tangente der Asymptotenlinie v = const. der Grundfläche im fraglichen Punkt (u, v) gebildet wird.

Eine entsprechende Betrachtung für die Fläche S_2:

$$\xi_2 = x + l \cdot \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \eta_2 = y + l \cdot \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \zeta_2 = z + l \cdot \frac{\partial z}{\partial v}, \quad [v = \text{const.!}]$$

wo l und u die Parameter sind, liefert die geradlinige Fläche:

$$x_2 = x + l \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \tau \cdot \left\{\frac{\partial x}{\partial u} + l \cdot \left(a_{21} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + a_{22} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + M \cdot X\right) + \frac{l^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial v} + a_{12} \cdot a_{31}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\right\},$$

$$y_2 = y + l \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \tau \cdot \left\{ \frac{\partial y}{\partial u} + l \cdot \left(a_{21} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + a_{22} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + M \cdot Y \right) + \frac{l^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial v} + a_{12} \cdot a_{31} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right\},$$

$$z_2 = z + l \cdot \frac{\partial z}{\partial v} + \tau \cdot \left\{ \frac{\partial z}{\partial u} + l \cdot \left(a_{21} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + a_{22} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} + M \cdot Z \right) + \frac{l^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial v} + a_{12} \cdot a_{31} \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right\};$$

hier sind τ und l als Flächenparameter aufzufassen.

Es läßt sich nun zeigen, daß beide Flächen unter Berücksichtigung der Beziehung[22]: $\varkappa = \frac{\partial a_{11}}{\partial v} + a_{12} \cdot a_{31} = \frac{\partial a_{32}}{\partial u} + a_{12} \cdot a_{31}$ und nach Ausführung der Substitution

$$l = \frac{t}{1 + \frac{t \cdot h \cdot \varkappa}{2}} \quad , \qquad \tau = h \cdot \left(1 + \frac{t \cdot h \cdot \varkappa}{2} \right)$$

übereinstimmen, es sich also um eine berührende Fläche zweiter Ordnung handeln muß, deren Erzeugende im Berührungspunkte mit den Tangenten der Asymptotenlinien in diesem Punkt identisch sind. Schreibt man nämlich

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} + h \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} + t \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v} + t \cdot h \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u \, \partial v} + \frac{t \cdot h^2}{2} \cdot \varkappa \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} \text{ usw.},$$

$$\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x} + l \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v} + \tau \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} + \tau \cdot l \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u \, \partial v} + \frac{\tau \cdot l^2}{2} \cdot \varkappa \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v} \text{ usw.}$$

und setzt in die Gleichungen für x_2, y_2, z_2 die oben angegebenen Funktionen von h und t an Stelle der l und τ, so wird:

$$\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x} + \frac{2t}{2 + t \cdot h \cdot \varkappa} \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v} + \frac{h}{2} \cdot (2 + t \cdot h \cdot \varkappa) \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} + t \cdot h \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u \, \partial v} + \frac{h \cdot t^2}{2 + t \cdot h \cdot \varkappa} \cdot \varkappa \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v} = \mathfrak{x} + h \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} + t \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v} + t \cdot h \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u \, \partial v} + \frac{t \cdot h^2}{2} \cdot \varkappa \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u},$$

also $\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_1$ und analog $y_2 = y_1$, $z_2 = z_1$.

[22] S. 13, Gl. (4).

Die auf obige Art hergeleitete geradlinige Fläche zweiter Ordnung, die einem jeden Punkt einer hyperbolisch gekrümmten Fläche zugeordnet werden kann, ist die nach ihrem Entdecker benannte Liesche F_2.

§ 3. Die quadratische Gleichung der Lieschen F_2 bezogen auf das x, y, z-Koordinatensystem.

Geht man von der Darstellung der Lieschen Fläche:

$$x_1 = x + h \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + t \cdot \left\{ \frac{\partial x}{\partial v} + h \cdot \left(a_{21} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + a_{22} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + M \cdot X \right) + \frac{h^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial a_{32}}{\partial u} + a_{31} \cdot a_{12} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \right\} \text{ u. s. f.}$$

aus und ordnet in den Gleichungen die Glieder nach $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, X, so kommt:

$$x_1 - x = h \cdot \left\{ 1 + t \cdot \left(a_{21} + \frac{h}{2} \cdot \varkappa \right) \right\} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + t \cdot \left\{ 1 + h \cdot a_{22} \right\} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + h \cdot t \cdot M \cdot X$$

usw.

Wenn zur Abkürzung der Rechnung:

$$\text{(a)} \qquad h \cdot \left\{ 1 + t \cdot \left(a_{21} + \frac{h}{2} \cdot \varkappa \right) \right\} = a,$$

$$\text{(b)} \qquad t \cdot \left\{ 1 + h \cdot a_{22} \right\} = b,$$

$$\text{(c)} \qquad h \cdot t \cdot M = c$$

gesetzt wird, folgt:

$$x_1 - x = a \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + b \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + c \cdot X,$$

und analog

$$y_1 - y = a \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + b \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + c \cdot Y,$$

$$z_1 - z = a \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + b \cdot \frac{\partial z}{\partial v} + c \cdot Z.$$

Das ist ein Gleichungssystem, dessen Determinante nach Seite 12 ungleich Null ist. Es ergeben sich nachstehende Lösungen:

$$a = \frac{1}{\Delta^2} \cdot \sum (x_1 - x) \cdot \left(G \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - F \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right),$$

$$b = \frac{1}{\Delta^2} \cdot \sum (x_1 - x) \cdot \left(E \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - F \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \right),$$

$$c = \sum (x_1 - x) \cdot X.$$

Nun liefern die Gleichungen (b) und (c) für die Veränderlichen t und h, da M von Null verschieden ist, : $h \cdot t = \frac{c}{M}$ und $t + \frac{c}{M} \cdot a_{22} = b$, also

$$t = b - \frac{c}{M} \cdot a_{22} \ , \qquad h = \frac{c}{b \cdot M - c \cdot a_{22}} \ ;$$

werden diese Werte in die Gleichung (a) eingesetzt, so wird

$$a = \frac{c}{b \cdot M - c \cdot a_{22}} \cdot \left\{ 1 + \left(b - \frac{c}{M} \cdot a_{22} \right) \cdot \left(a_{21} + \frac{c}{2 \cdot (b \cdot M - c \cdot a_{22})} \cdot \varkappa \right) \right\}$$

oder

$$(5) \quad c^2 \cdot (\varkappa - 2 a_{21} \cdot a_{22}) + 2 \cdot c \cdot (b a_{21} + a \cdot a_{22} + 1) \cdot M - 2 a b \cdot M^2 = 0.$$

Dies ist die in x_1, y_1, z_1 quadratische Gleichung der Lieschen Fläche. Sie läßt sich aus der Flächendarstellung

$$x_2 = x + l \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \tau \cdot \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} + l \cdot \left(a_{21} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + a_{22} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + M \cdot X \right) + \frac{l^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial v} + a_{12} \cdot a_{31} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right\} \text{ usw.}$$

in genau der gleichen Weise herleiten.

Wird hier nämlich

$$\tau \cdot (1 + l \cdot a_{21}) = \alpha \,,$$

$$l \cdot \left\{ 1 + \tau \cdot (a_{22} + \tfrac{1}{2} \cdot \varkappa) \right\} = \beta \,,$$

$$l \cdot \tau \cdot M = \gamma$$

gesetzt, so erhält die Gleichung der Fläche die Gestalt:

$$(6)\quad \gamma^2 \cdot (\varkappa - 2 \cdot a_{22} \cdot a_{21}) + 2 \cdot \gamma \cdot (\alpha \cdot a_{22} + \beta \cdot a_{21} + 1) \cdot M - 2\alpha \cdot \beta \cdot M^2 = O,$$

wo

$$\alpha = \frac{1}{\Delta^2} \cdot \sum (x_2 - x) \cdot \left(G \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - F \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right),$$

$$\beta = \frac{1}{\Delta^2} \cdot \sum (x_2 - x) \cdot \left(E \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - F \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \right),$$

$$\gamma = \sum (x_2 - x) \cdot X.$$

Wegen $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, $z_2 = z_1$ folgt: $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ und damit wieder obige Gleichung. Werden nun die Koordinaten der Lieschen Fläche mit ξ, η, ζ bezeichnet, so gilt allgemein:

$$(7)\quad c^2 \cdot (\varkappa - 2\, a_{21} \cdot a_{22}) + 2\, c \cdot (b \cdot a_{21} + a \cdot a_{22} + 1) \cdot M - 2 \cdot a \cdot b \cdot M^2 = O$$

für

$$a = \frac{1}{\Delta^2} \cdot \sum (\xi - x) \cdot \left(G \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - F \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right),$$

$$b = \frac{1}{\Delta^2} \cdot \sum (\xi - x) \cdot \left(E \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - F \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \right),$$

$$c = \sum (\xi - x) \cdot X.$$

Diese Gleichungen werden uns ein Hilfsmittel bei zwei weiteren Betrachtungen sein.

§ 4. Eine Demoulinsche Bestimmung der Lieschen F_2.

Eine ähnliche Bestimmung wie die in § 2 angeführte deutet A. Demoulin in seiner Arbeit: Sur quelques propriétés des surfaces courbes (C. R. 147 (1908), S. 565) an. Wie E. J. Wilczynski geht auch er aus von dem Ort gewisser Tangenten an die krummlinigen Asymptotenkurven der Fläche S_1, bzw. S_2, analytisch also etwa von den Gleichungen für x_1, y_1, z_1 (Glg. 5, S. 19), bzw. x_2, y_2, z_2 (Glg. 6 oben). Anstatt aber — wie es im vorigen geschehen — durch Substitution die Identität beider Gleichungen, d. h., geometrisch das Vereinigtsein der durch sie definierten Geradenscharen in einer Fläche darzutun, fragt er nach ihrer analytischen Darstellung bezüglich des folgenden schiefwinkligen Koordinaten-

systems. Er nimmt im betrachteten Flächenpunkte (x, y, z) die Tangenten der Asymptotenlinien v = const. und u = const. der Ausgangsfläche sowie die diesem Punkte zugeordnete Affinnormale als Achsen eines — sagen wir — ξ_1, η_1, ζ_1-Systems an[23]. Die Beziehungen zwischen den alten ξ-, η, ζ-Koordinaten und den neuen sind die folgenden:

$$\xi = x + \xi_1 \cdot \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{E}} + \eta_1 \cdot \frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{G}} + \zeta_1 \cdot \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}}{W},$$

$$\eta = y + \xi_1 \cdot \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\sqrt{E}} + \eta_1 \cdot \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\sqrt{G}} + \zeta_1 \cdot \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v}}{W}, \qquad W = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}\right)^2}$$

$$\xi = z + \xi_1 \cdot \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{E}} + \eta_1 \cdot \frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{G}} + \zeta_1 \cdot \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v}}{W}.$$

Auf Grund dieser Formeln führen wir in die Ausdrücke für a, b, c auf Seite 19 statt x_1, y, z_1 die neuen Kordinanten ξ_1, η_1, ζ_1 ein und erhalten die Werte:

$$a = \xi_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} + \zeta_1 \cdot \frac{a_{21}}{W},$$

$$b = \eta_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} + \zeta_1 \cdot \frac{a_{22}}{W},$$

$$c = \zeta_1 \cdot \frac{M}{W},$$

sodaß Gleichung (5) übergeht in:

$$\zeta_1^2 \cdot (\varkappa - 2 \cdot a_{21} \cdot a_{22}) \cdot \frac{M^2}{W^2} + 2 \cdot \zeta_1 \cdot \left\{ \left(\frac{\eta_1}{\sqrt{G}} + \frac{\zeta_1}{W} \cdot a_{22} \right) \cdot a_{21} + \left(\frac{\xi_1}{\sqrt{E}} + \frac{\zeta_1}{W} \cdot a_{21} \right) \cdot a_{22} + 1 \right\} \cdot \frac{M^2}{W} - 2 \cdot M^2 \cdot \left(\frac{\xi_1}{\sqrt{E}} + \frac{\zeta_1}{W} \cdot a_{21} \right) \cdot \left(\frac{\eta_1}{\sqrt{G}} + \frac{\zeta_1}{W} a_{22} \right) = 0.$$

[23] Demoulin bezeichnet die Achsen mit X, Y, Z.

Nach Ausführung der Multiplikationen und nach Addition entsprechender Glieder lautet sie

$$\zeta_1^2 \cdot \frac{\varkappa}{W^2} + \zeta_1 \cdot \frac{2}{W} - \xi_1 \cdot \eta_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{EG}} = 0. \tag{8}$$

Wir kommen zu demselben Ergebnis, wenn wir die bezeichneten Operationen mit der Gleichung (6) vornehmen. Das heißt also: unsere Gleichungen (5) und (6) bestimmen eine und dieselbe Fläche zweiter Ordnung; hinsichtlich des ξ_1, η_1, ζ_1-Systems wird sie durch die Gleichungen (8) dargestellt. Diese Gleichung lehrt unmittelbar den bekannten Satz: jede Tangentialebene der Ausgangsfläche schneidet die ihrem Berührungspunkte zugeordnete Liesche F_2 in den Tangenten der durch sie gehenden Asymptotenlinien.

§ 5. Die Gleichung der Lieschen F_2 bezogen auf das aus den Tangenten an die Asymptotenkurven und der Flächennormale im fraglichen Punkte bestehende Dreikant. Übereinstimmung mit einem Scheffersschen Resultat.

Eingangs wurden die bisher bekannten Konstruktionen der Lieschen F_2 angegeben und bereits darauf hingewiesen, daß die Gleichheit ihrer Ergebnisse auf einer wesentlichen Eigenschaft der Asymptotenlinien beruht. An dieser Stelle möge der Nachweis dadurch erbracht werden, daß wir eine von G. Scheffers herrührende, gemäß der Lieschen Erzeugung gewonnene Gleichung in eine aus der Wilczynskischen Methode heraus entwickelte Flächengleichung überführen. Eine Gleichung der letzten Art ist zweifelsohne unsere Gleichung (7); doch ist es angebracht, sie für unseren Zweck mittels der Gleichungen

$$\xi = x + \Theta_1 \cdot \frac{\partial x}{\partial u \sqrt{E}} + \Theta_2 \cdot \frac{\partial x}{\partial v \sqrt{G}} + \Theta_3 \cdot X \text{ usw.}$$

zu transformieren. Die Fläche erscheint dann durch die Koordinaten $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ in dem auch von G. Scheffers benutzten Dreikant festgelegt, das aus den positiven Halbtangenten der

Asymptotenlinien und dem positiven Teile der Flächennormale besteht. Wir erhalten zunächst:

$$a = \frac{\Theta_1}{\sqrt{E}} \quad , \qquad b = \frac{\Theta_2}{\sqrt{G}} \quad , \qquad c = \Theta_3$$

und infolgedessen die Gleichung:

$$(9) \quad \Theta_3{}^2 \cdot (\varkappa - 2a_{21} \cdot a_{22}) - 2 \cdot \frac{M}{\sqrt{E \cdot G}} \cdot \Theta_1 \cdot \Theta_2 + 2 \cdot \frac{M \cdot a_{22}}{\sqrt{E}} \cdot \Theta_1 \cdot \Theta_3 + 2 \cdot \frac{M \cdot a_{21}}{\sqrt{G}} \cdot \Theta_2 \cdot \Theta_3 + 2 \cdot M \cdot \Theta_3 = 0.$$

G. Scheffers fand für die Liesche F_2 bezogen auf das $\Theta_1\Theta_2\Theta_3$-System und unter Voraussetzung der Asymptotenkurven als Parameterlinien die Gleichung[24]:

$$2 \cdot \frac{M^2}{\sqrt{E \cdot G}} \cdot \Theta_1 \cdot \Theta_2 + \frac{M}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial \log \frac{M}{\Delta}}{\partial u} \cdot \Theta_1 \cdot \Theta_3 + \frac{M}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial \log \frac{M}{\Delta}}{\partial v} \cdot \Theta_2 \cdot \Theta_3 + \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \log \frac{M}{\Delta}}{\partial u \, \partial v} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial \log \frac{M}{\Delta}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \log \frac{M}{\Delta}}{\partial v} - \frac{F \cdot M^2}{\Delta^2} \right\} \cdot \Theta_3{}^2 - 2 \cdot M \cdot \Theta_3 = 0.$$

Wir werden versuchen, sie auf die Form (9) zu bringen. Die Fundamentalgleichungen[25]:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L}{\Delta}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M}{\Delta}\right) + a_{32} \cdot \frac{L}{\Delta} - 2a_{22} \cdot \frac{M}{\Delta} + a_{12} \cdot \frac{N}{\Delta} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{N}{\Delta}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{M}{\Delta}\right) + a_{31} \cdot \frac{L}{\Delta} - 2a_{21} \cdot \frac{M}{\Delta} + a_{11} \cdot \frac{M}{\Delta} = 0$$

reduzieren sich im vorliegenden Fall auf:

$$\frac{\partial \log \frac{M}{\Delta}}{\partial u} = -2 \cdot a_{22} \quad , \qquad \frac{\partial \log \frac{M}{\Delta}}{\partial v} = -2 \cdot a_{21},$$

[24] Sitzber. der Berl. Math. Ges., 14 (1915), S. 76 (19).

[25] „L. Bianchi", S. 91 (IV*).

und unsere Gleichung geht damit über in:

$$2 \cdot \frac{M}{\sqrt{E \cdot G}} \cdot \Theta_1 \cdot \Theta_2 - 2 \cdot \frac{a_{22} \cdot M}{\sqrt{E}} \cdot \Theta_1 \cdot \Theta_3 - 2 \cdot \frac{a_{21} \cdot M}{\sqrt{G}} \cdot \Theta_2 \cdot \Theta_3 + \left\{ - \frac{\partial a_{21}}{\partial u} + a_{12} \cdot a_{22} - \frac{F \cdot M^2}{\Delta^2} \right\} \Theta_3^2 - 2 \cdot M \cdot \Theta_3 = O.$$

Es ergab sich aber bei Herleitung der für Flächen mit asymptotischen Parameterlinien bestehenden Beziehung:

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial v} = \frac{\partial a_{32}}{\partial u}, \text{ daß}^{26} - \frac{F \cdot M^2}{\Delta^2} = \frac{\partial a_{21}}{\partial u} + a_{21} \cdot a_{22} - \varkappa \text{ ist.}$$

Wir erhalten daher:

$$2 \cdot \frac{M^2}{\sqrt{E \cdot G}} \cdot \Theta_1 \cdot \Theta_2 - 2 \cdot \frac{a_{22} \cdot M}{\sqrt{E}} \cdot \Theta_1 \cdot \Theta_3 - 2 \cdot \frac{a_{21} \cdot M}{\sqrt{G}} \Theta_2 \cdot \Theta_3 - (\varkappa - 2 \cdot a_{21} \cdot a_{22}) \cdot \Theta_3^2 - 2 \cdot M \cdot \Theta_3 = O.$$

Das aber ist die mit (−1) multiplizierte Gleichung (9).

§ 6. Die Bedingung für das Auftreten eines Paraboloids als Liescher F_2.

Um die Frage, ob es sich um ein Hyperboloid oder Paraboloid bei unserer Fläche zweiter Ordnung handelt, zu lösen, beziehen wir die Liesche F_2 auf das Dreikant, das die Tangente an die Asymptotenlinie v = const., die hierzu senkrechte Tangente und die Flächennormale miteinander bilden. Die Richtungskosinus der drei positiven Halbgeraden sind:

$$\alpha = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{E}}, \qquad \beta = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\sqrt{E}}, \qquad \gamma = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{E}};$$

$$l = \frac{E \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - F \cdot \frac{\partial x}{\partial u}}{\Delta \cdot \sqrt{E}}, \quad m = \frac{E \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - F \cdot \frac{\partial y}{\partial u}}{\Delta \cdot \sqrt{E}}, \quad n = \frac{E \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - F \cdot \frac{\partial z}{\partial u}}{\Delta \cdot \sqrt{E}};$$

$$\lambda = X, \qquad \mu = Y, \qquad \nu = Z,$$

[26] Seite 13 (2).

wenn $\left| \alpha \, l \, \lambda \right| = 1$, d. h., das neue $\xi' \, \eta' \, \zeta'$-System dem $\xi \, \eta \, \zeta$-System homolog ist. Auf dem gleichen Wege wie vorhin ergibt sich hier als Flächengleichung:

$$(10) \quad \zeta'^2 \cdot (\varkappa - 2 \cdot a_{21} \cdot a_{22}) + 2 \cdot \eta'^2 \cdot \frac{F \cdot M^2}{\Delta^2} - 2 \cdot \xi' \cdot \eta' \cdot \frac{M^2}{\Delta}$$

$$+ 2 \cdot \eta' \cdot \zeta' \cdot \frac{M}{\Delta \cdot \sqrt{E}} \cdot (F \cdot a_{22} - E \cdot a_{21}) + 2 \cdot \zeta' \cdot \xi' \cdot \frac{a_{22} \cdot M}{\sqrt{E}} + 2 \cdot \zeta' \cdot M = O.$$

Die Determinante der Glieder zweiter Ordnung lautet:

$$D = \begin{vmatrix} O & \frac{M^2}{\Delta} & \frac{a_{22} \cdot M}{\sqrt{E}} \\ \frac{M^2}{\Delta} & \frac{2 \cdot F \cdot M^2}{\Delta^2} & \frac{M}{\Delta \cdot \sqrt{E}} \cdot (F \cdot a_{22} - E \cdot a_{21}) \\ \frac{a_{22} \cdot M}{\sqrt{E}} & \frac{M}{\Delta \cdot \sqrt{E}} \cdot (F \cdot a_{22} - E \cdot a_{21}) & \varkappa - 2 \cdot a_{21} \cdot a_{22} \end{vmatrix};$$

ihre Entwicklung nach den Gliedern der letzten Zeile ergibt: $D = - \frac{M^4}{\Delta^2} \cdot \varkappa$. Da $M \neq O$ ist, und wir stets einen gewöhnlichen Bereich auf der Fläche ins Auge fassen, erhalten wir den bekannten Satz: Allen jenen Punkten auf Flächen, welche auf die Asymptotenlinien als Parameterlinien bezogen sind, gehören berührende Liesche Paraboloide an, für welche der Ausdruck $\frac{\partial a_{11}}{\partial v} + a_{12} \cdot a_{31}$ den Wert Null annimmt.

II. Untersuchungen über die Liesche F_2 eines Flächenpunktes unter Anwendung von Ableitungen nach Bogenlängen.

§ 7. Zweck der Untersuchungen und Angabe der Voraussetzungen, unter denen sie geführt werden.

Die bisherigen Gleichungen der Lieschen F_2 wie auch die Bedingung für einen paraboloidischen Punkt setzen eine auf die Asymtotenlinien als Parameterkurven bezogene Flächendarstellung voraus. In den folgenden Paragraphen werden wir uns von dieser speziellen Annahme freimachen und die bezeichneten Aufgaben für allgemeine Parameter zu lösen suchen; als Mittel dient die Methode der Ableitungen nach Bogenlängen in der Weise, wie sie R. v. Lilienthal[27] aufgestellt hat.

Auf der Fläche: $x=f_1(u,v)$, $y=f_2(u,v)$, $z=f_3(u,v)$ werden jetzt die Asymptotenlinien mit den Gleichungen

$$g_{21}(u,v)\,du+g_{22}(u,v)\,dv=0,\quad g_{11}(u,v)\,du+g_{12}(u,v)\,dv=0$$

zu Koordinatenlinien gewählt. Sie mögen die Bogenlänge σ_1 bzw. σ_2 haben. Ihre positiven, d. h., zunehmendem σ_1 bzw. σ_2 entsprechenden Halbtangenten schließen den Winkel $\varphi(u,v)$ ein. Außer ihnen ziehen wir noch die orthogonalen Trajektorien der Asymptotenlinien mit den Bogenlängen σ_3 und σ_4 in Betracht. Die Richtungen, in der diese Bogenlängen vom fraglichen Punkt aus zu nehmen, bestimmen wir so, daß durch eine positive Drehung $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ die positive Halbtangente der Kurve (σ_1) in die positive Halbtangente der Kurve (σ_3) übergeht, aber eine negative Drehung von der Größe $\frac{\pi}{2}$ zur Überführung der positiven Halbtangente der Kurve (σ_2) in die positive Halbtangente der Kurve (σ_4) erforderlich ist.

Von den geodätischen Krümmungshalbmessern $\varkappa_\nu$ $(\nu=1, 2, 3, 4)$ dieser Linien werden die reziproken Werte:

[27] „v. L.“ II_1, § 19, § 20, § 22.

$$\frac{1}{\varkappa_1} = \sum \frac{d^2x}{d\sigma_1^2} \cdot \left(Y \cdot \frac{dz}{d\sigma_1} - Z \cdot \frac{dy}{d\sigma_1} \right), \quad \frac{1}{\varkappa_4} = \sum \frac{d^2x}{d\sigma_4^2} \cdot \left(Y \cdot \frac{dz}{d\sigma_4} - Z \cdot \frac{dy}{d\sigma_4} \right)$$

gemäß der allgemeinen Formel, aber abweichend

$$\frac{1}{\varkappa_2} = -\sum \frac{d^2x}{d\sigma_2^2} \cdot \left(Y \cdot \frac{dz}{d\sigma_2} - Z \cdot \frac{dy}{d\sigma_2} \right), \quad \frac{1}{\varkappa_3} = -\sum \frac{d^2x}{d\sigma_3^2} \cdot \left(Y \cdot \frac{dz}{d\sigma_3} - Z \cdot \frac{dy}{d\sigma_3} \right)$$

definiert, damit sie positiv oder negativ sind, je nachdem der geodätische Krümmungsmittelpunkt in der positiven oder negativen Halbtangente der fraglichen Kurve liegt.

Die Verbindungslinie der geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Kurven (σ_1) und (σ_3) bestimmt auf der Tangente der Linie (σ_4) einen Punkt mit der Abszisse T_2; ebenso wird die Tangente der Kurve (σ_3) von der Verbindungslinie der geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Kurven (σ_2) und (σ_4) in einem Punkte geschnitten, dem die Abszisse T_1 zukommt. Die genannten Schnittpunkte spielen bei gewissen kinematischen Betrachtungen die Rolle der Nullpunkte in der Tangentialebene von P, weshalb die Größen T_1 und T_2 die Bezeichnung „Nullpunktsvektoren" erhalten haben.

Was die Ableitung einer Ortsfunktion $f(u,v)$ nach den Bogenlängen σ_1 und σ_2 angeht, mag noch bemerkt werden, daß, wenn λ_1 und λ_2 integrierende Faktoren der Differentialformen:

$$\frac{N_1}{\vartheta} \cdot (g_{11} \cdot du + g_{12} \cdot dv) \qquad \text{und} \qquad \frac{N_2}{\vartheta} \cdot (g_{21} \cdot du + g_{22} \cdot dv), \text{ wobei}$$

$$N_1 = \left\{ g_{22}^2 \cdot E - 2 \cdot g_{22} \cdot g_{21} \cdot F + g^2{}_{21} \cdot G \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$N_2 = \left\{ g_{12}^2 \cdot E - 2 \cdot g_{12} \cdot g_{11} \cdot F + g^2{}_{11} \cdot G \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\vartheta = g_{11} \cdot g_{22} - g_{21} \cdot g_{12}$$

sind, die wichtige Bezeichnung besteht:

$$\frac{d}{d\sigma_2} \left\{ \frac{df}{d\sigma_1} \right\} - \frac{d}{d\sigma_1} \left\{ \frac{df}{d\sigma_2} \right\} = \frac{d \log \lambda_1}{d\sigma_2} \cdot \frac{df}{d\sigma_1} - \frac{d \log \lambda_2}{d\sigma_1} \cdot \frac{df}{d\sigma_2},$$

in der

$$\frac{d \log \lambda_1}{d \sigma_2} = \frac{\vartheta}{N_1 \cdot N_2} \cdot \left(\frac{\partial a_{12}}{\partial u} - \frac{\partial a_{11}}{\partial v} \right), \quad \frac{d \log \lambda_2}{d \sigma_1} = \frac{\vartheta}{N_1 \cdot N_2} \cdot \left(\frac{\partial a_{21}}{\partial v} - \frac{\partial a_{22}}{\partial u} \right)$$ [28]

ist. — Es bedarf noch einer geeigneten analytischen Festlegung der beiden Scharen von Asymptotenlinien auf der Fläche $x = f_1(u,v)$, $y = f_2(u,v)$, $z = f_3(u,v)$ in Anlehnung an die bekannte Gleichung

$$L \cdot du^2 + 2 \cdot M \cdot du \cdot dv + N \cdot dv^2 = 0.$$

Wir ersetzen diese Differentialgleichung zweiten Grades auf folgende Weise durch zwei Differentialgleichungen ersten Grades. Es ist offenbar

$$du \cdot (L \cdot du + M \cdot dv) + dv \cdot (M \cdot du + N \cdot dv) = 0.$$

Hieraus folgt unter Benutzung eines Proportionalitätsfaktors τ

$$(1 - \tau \cdot M) \cdot du - \tau \cdot N \cdot dv = 0$$

und $$\tau \cdot L \cdot du + (1 + \tau \cdot M) dv = 0,$$

somit $$1 - \tau^2 \cdot (M^2 - L \cdot N) = 0.$$

Unter $\sqrt{M^2 - L \cdot N}$ soll der positive Wert der Wurzel verstanden werden.

Im Falle $M = O$ kommt für $\tau = \frac{1}{\sqrt{-L \cdot N}}$ das Gleichungssystem

(a) $$du - \frac{N}{\sqrt{-L \cdot N}} \cdot dv = O \quad , \qquad (b) \quad \frac{L}{\sqrt{-L \cdot N}} \cdot du + dv = O;$$

für $\tau = -\frac{1}{\sqrt{-L \cdot N}}$ das System

(c) $$du + \frac{N}{\sqrt{-L \cdot N}} \cdot dv = O \quad , \qquad (d) \quad \frac{-L}{\sqrt{-L \cdot N}} \cdot du + dv = O.$$

Dabei sind die Gleichungen (a) und (b) sowie die Gleichungen (c) und (d) äquivalent.

---

[28] „v. L." II_1 S. 227 (13) u. S. 228 (14). Hier ist $a_{11} = \frac{N_1}{\vartheta} \cdot g_{11}$, $a_{12} = \frac{N_1}{\vartheta} \cdot g_{12}$, $a_{21} = \frac{N_2}{\vartheta} \cdot g_{21}$, $a_{22} = \frac{N_2}{\vartheta} \cdot g_{22}$.

Im Falle $M \neq O$ ergibt sich $\tau = \pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{M^2 - L \cdot N}}$; hier wird $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ gesetzt, je nachdem $M > O$ oder $M < O$ ist.

Für $\tau = \frac{\varepsilon}{\sqrt{M^2 - L \cdot N}}$ folgt

$$(e) \quad \left(1 - \frac{\varepsilon \cdot M}{\sqrt{M^2 - L \cdot N}}\right) \cdot du - \frac{\varepsilon \cdot N}{\sqrt{M^2 - L \cdot N}} \cdot dv = O \ ,$$

$$(f) \quad \frac{\varepsilon \cdot L}{\sqrt{M^2 - L \cdot N}} du + \left(1 + \frac{\varepsilon \cdot M}{\sqrt{M^2 - L \cdot N}}\right) \cdot dv = O \ ;$$

für $\tau = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{M^2 - L \cdot N}}$ ergibt sich

$$(g) \quad \left(1 + \frac{\varepsilon \cdot M}{\sqrt{M^2 - L \cdot N}}\right) \cdot du + \frac{\varepsilon \cdot N}{\sqrt{M^2 - L \cdot N}} \cdot dv = O \ ,$$

$$(h) \quad \frac{-\varepsilon \cdot L}{\sqrt{M^2 - L \cdot N}} du + \left(1 - \frac{\varepsilon \cdot M}{\sqrt{M^2 - L \cdot N}}\right) \cdot dv = O.$$

Da für $N = O$ die Gleichung (e) illusorisch, für $N \neq O$ die Gleichungen (e) und (f) äquivalent sind; für $L = O$ die Gleichung (h) illusorisch, für $L \neq O$ die Gleichungen (g) und (h) äquivalent sind, wählen wir zur analytischen Darstellung der beiden Scharen von Kurven die Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$(f) \quad \frac{\varepsilon \cdot L}{\sqrt{M^2 - L \cdot N}} \cdot du + \left(1 + \frac{\varepsilon \cdot M}{\sqrt{M^2 - L \cdot N}}\right) \cdot dv = O,$$

$$(g) \quad \left(1 + \frac{\varepsilon \cdot M}{\sqrt{M^2 - L \cdot N}}\right) \cdot du + \frac{\varepsilon \cdot N}{\sqrt{M^2 - L \cdot N}} \cdot dv = O.$$

Sie schließen auch den erst behandelten Fall M=O ein, für den nach Belieben ε als positive oder negative Einheit genommen werden kann. Faßt man nun die durch diese Gleichungen definierten Asymptotenlinien als die Koordinatenkurven (σ_1) und (σ_2) auf und setzt

$$g_{11} = -\varepsilon \cdot L, \quad g_{12} = -(\omega + \varepsilon \cdot M), \quad g_{21} = \omega + \varepsilon \cdot M, \quad g_{22} = \varepsilon \cdot N,$$

$$N_1^2 = N \cdot (E \cdot N - L \cdot G) + 2 \cdot (M \cdot G - F \cdot N) \cdot (M + \varepsilon \cdot \omega),$$

$$N_2^2 = L \cdot (L \cdot G - E \cdot N) + 2 \cdot (E \cdot M - F \cdot L)\,(M + \varepsilon \cdot \omega),$$

wobei ω die Bedeutung von $\sqrt{M^2 - L \cdot N}$ hat, so kommt

$$\frac{dx}{d\sigma_1} = \frac{1}{N_1} \cdot \left\{ \varepsilon \cdot N \cdot \frac{dx}{du} - (\omega + \varepsilon \cdot M) \cdot \frac{dx}{dv} \right\}, \text{ usw.}$$

$$\frac{dx}{d\sigma_2} = \frac{1}{N_2} \cdot \left\{ (\omega + \varepsilon \cdot M) \cdot \frac{dx}{du} - \varepsilon \cdot L \cdot \frac{dx}{dv} \right\}, \text{ usw.}$$

und damit:

$$\frac{dy}{d\sigma_1} \cdot \frac{dz}{d\sigma_2} - \frac{dy}{d\sigma_2} \cdot \frac{dz}{d\sigma_1} = \frac{2 \cdot \omega \cdot (1 + \varepsilon \cdot M) \sqrt{E \cdot G - F^2}}{N_1 \cdot N_2} \cdot X.$$

Unter der Annahme, daß N_1, N_2 und $\sqrt{E \cdot G - F^2}$ positive Funktionen von u und v sind, wird hier der Faktor von X positiv, und es ergibt sich gemäß der allgemeinen Orientierung der Koordinatenlinien[29]:

$$\sin \varphi = \frac{2 \cdot \omega \cdot (\omega + \varepsilon \cdot M) \cdot \sqrt{E \cdot G - F^2}}{N_1 \cdot N_2}.$$

§ 8. Die Fläche zweiter Ordnung, die von den Tangenten der nicht mit den Erzeugenden zusammenfallenden Asymptotenlinien einer windschiefen geradlinigen Fläche längs einer regulären Erzeugenden derselben gebildet wird.

Wir bestimmen die gesuchte Fläche, indem wir ihre Erzeugenden als die Tangenten der Kurven (σ_1) einer gegebenen Fläche

[29] „v. L." II_1 S. 229.

$x = f_1(u, v)$, ., . längs einer Einzelkurve (σ_2) betrachten. Dabei muß vorausgesetzt werden, daß die Tangenten der Kurven (σ_1) nicht zu den Tangenten der Kurve (σ_2) konjugiert sind, da sonst die Tangenten der Kurven (σ_1) eine abwickelbare geradlinige Fläche bilden würden. Abgesehen davon bleiben die Kurven (σ_1) und (σ_2) zunächst beliebig wählbar, sie brauchen also nicht mit den Asymptotenlinien der Fläche zusammenzufallen.

Die Tangenten der Kurven (σ_1) längs einer Einzelkurve (σ_2) bilden eine Fläche, die sich durch die Gleichungen

$$\xi = x + h \cdot \frac{dx}{d\sigma_1}, \qquad \eta = y + h \cdot \frac{dy}{d\sigma_1}, \qquad \zeta = z + h \cdot \frac{dz}{d\sigma_1}$$

darstellen läßt. Hier spielen die Abszisse h und die Bogenlänge σ_2 die Rolle der Parameter. Es wird:

$$\frac{\partial \xi}{\partial h} = \frac{dx}{d\sigma_1}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \sigma_2} = \frac{dx}{d\sigma_2} + h \cdot \frac{d^2x}{d\sigma_1 d\sigma_2} = \frac{dx}{d\sigma_2} + h \cdot \left(-\frac{1}{T_2} \cdot \frac{dx}{d\sigma_3} + m \cdot X\right),$$

usw.

Für die Fundamentalgrößen erster Ordnung ergibt sich also:

$$E = 1 \quad , \quad F = \cos\varphi \quad , \quad G = 1 - \frac{2 \cdot h \cdot \sin\varphi}{T_2} + h^2 \cdot \left(\frac{1}{T_2^2} + m^2\right),$$

und mithin ist: $E \cdot G - F^2 = \Delta^2 = \left(\sin\varphi - \frac{h}{T_2}\right)^2 + h^2 \cdot m^2$.

Ferner folgt:

$$\frac{\partial \eta}{\partial h} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma_2} - \frac{\partial \zeta}{\partial h} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \sigma_2} = X \cdot \sin\varphi - h \cdot \left(\frac{1}{T_2} \cdot X + m \cdot \frac{dx}{d\sigma_3}\right),$$

sodaß die Richtungskosinus der Normalen unserer Fläche (ξ, η, ζ) die Form erhalten:

$$\Xi = \frac{X \cdot \left(\sin\varphi - \frac{h}{T_2}\right) - m \cdot h \cdot \frac{dx}{d\sigma_3}}{\Delta}$$

$$H = \frac{Y \cdot \left(\sin\varphi - \frac{h}{T_2}\right) - m \cdot h \cdot \frac{dy}{d\sigma_3}}{\Delta}$$

$$Z = \frac{Z \cdot \left(\sin\varphi - \frac{h}{T_2}\right) - m \cdot h \cdot \frac{dz}{d\sigma_3}}{\Delta}.$$

Die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial h^2} = O \quad , \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial h \, \partial \sigma_2} = \frac{d^2 x}{d\sigma_1 \, d\sigma_2} \quad , \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial \sigma_2^2} = \frac{d^2 x}{d\sigma_2^2} + h \cdot \frac{d^3 x}{d\sigma_1 \, d\sigma_2^2}, \text{ usw.,}$$

ergeben für die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung:

$$L = O \quad , \quad M \cdot \Delta = m \cdot \sin\varphi,$$

$$N \cdot \Delta = \frac{\sin\varphi}{P_2} + h \cdot \left(-\frac{1}{T_2 \cdot P_2} + \sin\varphi \cdot \sum X \cdot \frac{d^3 x}{d\sigma_1 \, d\sigma_2^2} - m \cdot \sum \frac{dx}{d\sigma_3} \cdot \frac{d^2 x}{d\sigma_2^2}\right)$$

$$+ h^2 \cdot \left(-\frac{1}{T_2} \cdot \sum X \cdot \frac{d^3 x}{d\sigma_1 \, d\sigma_2^2} - m \cdot \sum \frac{dx}{d\sigma_3} \cdot \frac{d^2 x}{d\sigma_1 \, d\sigma_2^2}\right).$$

Die in der letzten Gleichung auftretenden Summen werden auf die nachstehende Art berechnet. Man hat:

$$\sum X \cdot \frac{d^2 x}{d\sigma_1 \, d\sigma_2} = m; \text{ daher: } \sum X \cdot \frac{d^3 x}{d\sigma_1 \, d\sigma_2^2} = \frac{dm}{d\sigma_2} - \sum \frac{dX}{d\sigma_2} \cdot \frac{d^2 x}{d\sigma_1 \, d\sigma_2}.$$

Da $$\frac{dx}{d\sigma_3} = \frac{\frac{dx}{d\sigma_2} - \cos\varphi \cdot \frac{dx}{d\sigma_1}}{\sin\varphi} \quad , \quad \frac{dx}{d\sigma_4} = \frac{\frac{dx}{d\sigma_1} - \cos\varphi \cdot \frac{dx}{d\sigma_2}}{\sin\varphi} \quad ,$$

ist $\sum \frac{dx}{d\sigma_3} \cdot \frac{dx}{d\sigma_4} = -\cos\varphi$, sodaß $\sum X \cdot \frac{d^3x}{d\sigma_1 \, d\sigma_2^2} = \frac{dm}{d\sigma_2} - \frac{\tau}{T_2}$,

wo $\tau = \frac{1}{\sin\varphi} \cdot \left(\frac{1}{P_2} - m \cdot \cos\varphi\right)$ ist.

Ferner hat man: $\sum \frac{dx}{d\sigma_3} \cdot \frac{d^2x}{d\sigma_1 d\sigma_2} = -\frac{1}{T_2}$,

somit $\sum \frac{dx}{d\sigma_3} \cdot \frac{d^3x}{d\sigma_1 \, d\sigma_2^2} = -\frac{d\frac{1}{T_2}}{d\sigma_2} - \sum \frac{d^2x}{d\sigma_3 d\sigma_2} \cdot \frac{d^2x}{d\sigma_1 d\sigma_2}$.

Nun ist $\sum \frac{dx}{d\sigma_1} \cdot \frac{d^2x}{d\sigma_3 d\sigma_2} = -\sum \frac{dx}{d\sigma_3} \cdot \frac{d^2x}{d\sigma_1 d\sigma_2} = \frac{1}{T_2}$,

$\sum \frac{dx}{d\sigma_3} \cdot \frac{d^2x}{d\sigma_3 d\sigma_2} = 0$,

$\sum X \cdot \frac{d^2x}{d\sigma_3 d\sigma_2} = -\sum \frac{dX}{d\sigma_2} \cdot \frac{dx}{d\sigma_3} = \tau$,

also $\frac{d^2x}{d\sigma_3 d\sigma_2} = \frac{1}{T_2} \cdot \frac{dx}{d\sigma_1} + \tau \cdot X$.

Damit ergibt sich: $\sum \frac{dx}{d\sigma_3} \cdot \frac{d^3x}{d\sigma_1 \, d\sigma_2^2} = -\frac{d\frac{1}{T_2}}{d\sigma_2} - m \cdot \tau$.

Zudem hat man: $\sum \frac{dx}{d\sigma_3} \cdot \frac{d^2x}{d\sigma_2^2} = -\frac{\cos\varphi}{\varkappa_2}$.

Wir erhalten also in abkürzender Schreibweise:

$N \cdot \Delta = \frac{\sin\varphi}{P_2} + h \cdot k_1 + h^2 \cdot k_2$, wo wegen $\frac{1}{\varkappa_2} = \frac{1}{T_2} - \frac{d\varphi}{d\sigma_2}$:

$$k_1 = -\frac{1}{T_2 \cdot P_2} + m \cdot \cos\varphi \cdot \left(\frac{1}{T_2} - \frac{d\varphi}{d\sigma_2}\right) + \sin\varphi \cdot \left(\frac{dm}{d\sigma_2} - \frac{\tau}{P_2}\right)$$

$$= -\frac{2 \cdot \tau \cdot \sin\varphi}{T_2} + \sin^2\varphi \, \frac{d\frac{m}{\sin\varphi}}{d\sigma_2} ,$$

$$k_2 = -\frac{1}{T_2} \cdot \left(\frac{dm}{d\sigma_2} - \frac{\tau}{T_2}\right) + m \cdot \left(\frac{d\frac{1}{T_2}}{d\sigma_2} + m \cdot \tau\right)$$

ist. Eine Vereinfachung dieser Ausdrücke wird dadurch erreicht, daß man $T_2 \cdot \sin\varphi = h_1$ und $\frac{m}{\sin\varphi} = \mu$ setzt. Es wird dann:

$$k_1 = k'_1 \cdot \sin^2\varphi \quad , \qquad \text{wo } k'_1 = -\frac{2 \cdot \tau}{h_1} + \frac{d\mu}{d\sigma_2}$$

$$k_2 = k'_2 \cdot \sin^2\varphi \quad , \qquad \text{wo } k'_2 = \mu \cdot \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\sigma_2} - \frac{1}{h_1} \cdot \frac{d\mu}{d\sigma_2} + \tau \cdot \left(\frac{1}{h_1^2} + \mu^2\right).$$

Die Gleichung der nicht gradlinigen Asymptotenlinien unserer Fläche, nämlich $2 \cdot M \cdot dh + N \cdot d\sigma_2 = O$, ergibt:

$$\frac{dh}{d\sigma_2} = -\frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{1}{P_2 \cdot \sin\varphi} + h \cdot k'_1 + h^2 \cdot k'_2\right),$$

folglich sind die Richtungskosinus der Tangenten unserer Asymptotenkurven proportional

$$\frac{dx}{d\sigma_2} + h \cdot \left(m \cdot X - \frac{1}{T_2} \cdot \frac{dx}{d\sigma_3}\right) - \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dx}{d\sigma_1} \cdot \left(\frac{1}{P_2 \cdot \sin\varphi} + h \cdot k'_1 + h^2 \cdot k'_2\right)$$

und den durch Ersetzen von x durch y und z hieraus entstehenden Ausdrücken. Bezeichnen wir diese Ausdrücke der Reihe nach kurz mit α, β, γ, so stellen die Gleichungen:

$$\xi = x + h \cdot \frac{dx}{d\sigma_1} + t \cdot \alpha \ ,$$

(11)

$$\eta = y + h \cdot \frac{dy}{d\sigma_1} + t \cdot \beta \ ,$$

$$\zeta = z + h \cdot \frac{dz}{d\sigma_1} + t \cdot \gamma$$

die gesuchte Fläche zweiter Ordnung dar.

Wir beziehen diese Fläche auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Punkt (x, y, z), dessen U-Achse mit der Tangente $\left(\frac{dx}{d\sigma_1}\cdot\cdot\right)$, dessen V-Achse mit der Tangente $\left(\frac{dx}{d\sigma_2}\cdot\cdot\right)$, dessen W-Achse mit der Flächennormale (X . .) zusammenfällt. Man erhält:

$$U = h + t\cdot\left\{-\frac{1}{2\cdot\mu\cdot P_2\cdot\sin\varphi}-\frac{h}{2}\cdot\frac{d\log\mu}{d\sigma_2}+\frac{h}{h_1\cdot\mu\cdot P_2\cdot\sin\varphi}-\frac{k'_2}{2\cdot\mu}\cdot h^2\right\},$$

$$V = t\cdot\left(1-\frac{h}{h_1}\right),\quad W = t\cdot h\cdot m\ ,$$

und durch Elimination von h und t folgt:

$$(12)\quad U\cdot V+\frac{U\cdot W}{h_1\cdot m}+\frac{V^2}{2\cdot\mu\cdot P_2\cdot\sin\varphi}+\frac{V\cdot W}{2m}\cdot\frac{d\log\mu}{d\sigma_2}$$
$$+\frac{W^2}{m^2}\cdot\left(\frac{1}{2\,h_1}\cdot\frac{d\log\mu}{d\sigma_2}-\frac{1}{2h_1^2\cdot\mu\cdot P_2\cdot\sin\varphi}+\frac{k'_2}{2\mu}\right)-\frac{W}{m}=0\,.$$

In entsprechender Weise ordnet die Kurvenschar (σ_2) einer Einzelkurve (σ_1) im Punkte (x, y, z) eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung zu, die durch die Gleichung:

$$(13)\quad U\cdot V+\frac{V\cdot W}{h_2\cdot m}+\frac{U^2}{2\mu\cdot P_1\cdot\sin\varphi}+\frac{U\cdot W}{2m}\cdot\frac{d\log\mu}{d\sigma_1}$$
$$+\frac{W^2}{m^2}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot h_1}\cdot\frac{d\log\mu}{d\sigma_1}-\frac{1}{2\cdot h_2{}^2\cdot\mu\cdot P_1\cdot\sin\varphi}+\frac{k''_2}{2\cdot\mu}\right)-\frac{W}{m}=0$$

bestimmt wird, wo: $h_2 = T_1\cdot\sin\varphi$

und $$k''_2=\mu\cdot\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\sigma_1}-\frac{1}{h_2}\cdot\frac{d\mu}{d\sigma_1}+\left(\frac{1}{P_1\cdot\sin\varphi}-\mu\cdot\cos\varphi\right)\left(\frac{1}{h_2{}^2}+\mu^2\right).$$

Es ist nun leicht, die von G. Scheffers[24] zuerst bewiesene wichtige Ergänzung des Lieschen Satzes herzuleiten, daß nämlich

die beiden auf die geschilderte Art einem Flächenpunkte zugehörigen Flächen zweiter Ordnung nur dann zusammenfallen, wenn die Kurven (σ_1) und (σ_2) Asymptotenlinien sind.

Damit die Gleichungen (12) und (13) eine und dieselbe Fläche darstellen, müssen zunächst $\frac{1}{P_1}$ und $\frac{1}{P_2}$ verschwinden, d. h. die Kurven (σ_1) und (σ_2) sind Asymptotenlinien. Die Glieder mit U^2 und V^2 fallen fort. Es ist jetzt

$$(14) \qquad \frac{1}{h_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d \log \mu}{d \sigma_1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{h_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d \log \mu}{d \sigma_2} .$$ [30]

Damit erweisen sich auch die Koeffizienten von $U \cdot W$ und $V \cdot W$ als einander gleich. Aus den vorstehenden Beziehungen folgt:

$$(15) \qquad \frac{d \frac{1}{h_1}}{d \sigma_2} - \frac{d \frac{1}{h_2}}{d \sigma_1} = \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right) \cdot \cos \varphi ,$$

sodaß auch die Koeffizienten von $\frac{W^2}{m^2}$ miteinander identisch sind.

§ 9. Geometrische Bedeutung der Größen $h_1 = T_2 \cdot \sin \varphi$ und $h_2 = T_1 \cdot \sin \varphi$.

I. Zunächst stellen sich diese Größen als die senkrechten Projektionen der Nullpunktsvektoren T_2 oder T_1 auf die Tangente der Kurve (σ_1) oder (σ_2) dar;

Denn für $$T_2 \cdot \frac{dx}{d\sigma_4} + 1 \cdot \frac{dx}{d\sigma_3} = l' \cdot \frac{dx}{d\sigma_1}$$

folgt $$l' = T_2 \cdot \sin \varphi = h_1 ;$$

für $$T_1 \cdot \frac{dx}{d\sigma_3} + 1 \cdot \frac{dx}{d\sigma_4} = l' \cdot \frac{dx}{d\sigma_2}$$

folgt $$l' = T_1 \cdot \sin \varphi = h_2 .$$

Es gibt noch zwei weitere Bedeutungen unserer Größen.

[30] „v. L." II_1 S. 253.

II. Fragt man nach einer Kurve auf der Fläche $\xi = x + h \cdot \frac{dx}{d\sigma_1}$ mit der Eigenschaft, daß ihre im Punkte (ξ, η, ζ) berührende Tangente in der Normalebene $\left(X, \frac{dx}{d\sigma_1}\right)$ liegt, so muß $\sum \frac{d\xi}{d\sigma_2} \cdot \frac{dx}{d\sigma_3}$ verschwinden, also ist h derart zu bestimmen, daß

$$\sum \left(\frac{dx}{d\sigma_2} + h \cdot \frac{d^2x}{d\sigma_1 d\sigma_2} + \frac{dh}{d\sigma_2} \cdot \frac{dx}{d\sigma_1}\right) \cdot \frac{dx}{d\sigma_3} = 0 .$$

Dies ergibt $h = h_1$.

Entsprechend erhält man für die Fläche $\xi = x + h \cdot \frac{dx}{d\sigma_2}$, .,. die Bestimmung $h = h_2$.

III. Wir betrachten die Schar der Normalebenen $\left(X, \frac{dx}{d\sigma_1}\right)$ längs der Kurve (σ_2). Die zu dem gewählten Punkte (x, y, z) gehörende Einzelebene dieser Schar besitzt eine Charakteristik, die durch die Gleichungen

$$\sum (\xi - x) \cdot \frac{dx}{d\sigma_3} = 0$$

und $$\sum (\xi - x) \cdot \frac{d^2x}{d\sigma_3 d\sigma_2} = \sum \frac{dx}{d\sigma_2} \cdot \frac{dx}{d\sigma_3} = \sin \varphi$$

bestimmt wird. Für den Schnittpunkt dieser Charakteristik mit der Tangente der Kurve (σ_1) ergibt sich $h = h_1$.

Durch eine analoge Überlegung für die Schar der Normalebenen $\left(X, \frac{dx}{d\sigma_2}\right)$ längs der Linie (σ_1) wird man zu dem Resultat $h = h_2$ geführt.

Damit erweisen sich die Größen h_1 und h_2 identisch mit den von A. Voss benutzten Größen r_1 und r[31].

[31] Sitzber. der Bayer. Akad. der Wiss. v. 7. Mai 1892, S. 258.

§ 10. Die Gleichung der Lieschen F_2 bezogen auf die Tangenten der Krümmungslinien und die Flächennormale. Anwendung auf Flächen konstanter negativer Krümmung, speziell die Pseudosphäre.

Wir lassen jetzt die Kurven (σ_1) und (σ_2) mit den Asymptotenlinien der Fläche (x, y, z) zusammenfallen. Dann wird zunächst

$$\frac{1}{P_2} = 0 \quad , \qquad \tau = -\mu \cdot \cos\varphi \quad , \qquad \frac{d\mu}{d\sigma_2} = \frac{2\mu}{h_2} \quad ,$$

sodaß

$$k'_1 = 2 \cdot \mu \cdot \left(\frac{\cos\varphi}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right)$$

wird. Ferner sei abkürzend gesetzt

$$k'_2 = 2 \cdot \mu \cdot k \ ,$$

wo also

$$k = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\sigma_2} - \frac{2}{h_1 \cdot h_2} - \cos\varphi \cdot \left(\frac{1}{h_1^2} + \mu^2 \right) \right\}$$

ist. Die in § 9 entwickelten Gleichungen der F_2 nehmen die Form an

$$\xi_1 = x + h \cdot \frac{dx}{d\sigma_1} + t \cdot \left\{ \frac{dx}{d\sigma_2} + h \cdot \left(m \cdot X - \frac{1}{h_1} \cdot \frac{dx}{d\sigma_2} - \frac{1}{h_2} \cdot \frac{dx}{d\sigma_1} \right) - h^2 \cdot k \cdot \frac{dx}{d\sigma_1} \right\} \text{ usw.}$$

Hier empfiehlt es sich, die F_2 auf das System der Tangenten der Krümmungslinien und der Flächennormale als Koordinatenachsen zu beziehen. Die Richtungskosinus A_1, B_1, C_1 der Tangenten der ersten Schar der Krümmungslinien mit der Bogenlänge s_1 definieren wir durch die Gleichungen

$$\frac{dx}{ds_1} = A_1 = \frac{\frac{dx}{d\sigma_1} - \frac{dx}{d\sigma_2}}{2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}}, \quad \frac{dy}{ds_1} = B_1 = \frac{\frac{dy}{d\sigma_1} - \frac{dy}{d\sigma_2}}{2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}}, \quad \frac{dz}{ds_1} = C_1 = \frac{\frac{dz}{d\sigma_1} - \frac{dz}{d\sigma_2}}{2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}};$$

die Richtungskosinus A_2, B_2, C_2 der Tangenten der zweiten Schar mit der Bogenlänge s_2 durch die Gleichungen:

$$\frac{dx}{ds_2} = A_2 = \frac{\frac{dx}{d\sigma_1} + \frac{dx}{d\sigma_2}}{2 \cdot \cos\frac{\varphi}{2}}, \quad \frac{dy}{ds_2} = B_2 = \frac{\frac{dy}{d\sigma_1} + \frac{dy}{d\sigma_2}}{2 \cdot \cos\frac{\varphi}{2}}, \quad \frac{dz}{ds_2} = C_2 = \frac{\frac{dz}{d\sigma_1} + \frac{dz}{d\sigma_2}}{2 \cdot \cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Daraus folgt für die Richtungskosinus der Flächennormalen: $X = B_1 \cdot C_2 - C_1 \cdot B_2$ usw., sodaß also $\left| A_1\, A_2\, X \right| = 1$ ist.

Umgekehrt ergibt sich:

$$\frac{dx}{d\sigma_1} = A_1 \cdot \sin\frac{\varphi}{2} + A_2 \cdot \cos\frac{\varphi}{2}, \quad \frac{dx}{d\sigma_2} = -A_1 \cdot \sin\frac{\varphi}{2} + A_2 \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \text{ u. s. f.}$$

Nehmen wir nun die Tangenten (A_1, B_1, C_1) zur U-Achse, die Tangente (A_2, B_2, C_2) zur V-Achse, die Flächennormale zur W-Achse, so bestehen die Beziehungen

$$\xi_1 = x + U \cdot \frac{dx}{ds_1} + V \cdot \frac{dx}{ds_2} + W \cdot X = \frac{1}{2}\left(\frac{U}{\sin\frac{\varphi}{2}} + \frac{V}{\cos\frac{\varphi}{2}}\right) \cdot \frac{dx}{d\sigma_1}$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{U}{\cos\frac{\varphi}{2}} + \frac{V}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right) \cdot \frac{dx}{d\sigma_2} + W \cdot X \text{ usw.},$$

mit deren Hilfe die parametrische Darstellung der F_2 gewonnen wird:

$$U = \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \left\{ h + t \cdot \left(-1 + h \cdot \left[\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right] - h^2 \cdot k \right) \right\},$$

(16)
$$V = \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \left\{ h + t \cdot \left(1 - h \cdot \left[\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right] - h^2 \cdot k \right) \right\},$$

$$W = t \cdot h \cdot m .$$

Zwischen U, V, W besteht demnach die quadratische Gleichung:

(17)
$$\left(\frac{U}{\sin\frac{\varphi}{2}} + \frac{V}{\cos\frac{\varphi}{2}} + \frac{2 \cdot W}{m \cdot h_2}\right) \cdot \left(\frac{U}{\sin\frac{\varphi}{2}} - \frac{V}{\cos\frac{\varphi}{2}} - \frac{2 \cdot W}{m \cdot h_1}\right) = \frac{4 \cdot W}{m} \cdot \left(\frac{W \cdot k}{m} - 1\right).$$

Wir berechnen die Größen $\sin\frac{\varphi}{2}$, $\cos\frac{\varphi}{2}$ und m. Bezeichnet man den zur Krümmungslinie (s_1) gehörenden Hauptkrümmungshalbmesser mit R_1, den zur Kurve (s_2) gehörenden Hauptkrümmungshalbmesser mit R_2, so ist:

$$\sum X \cdot \frac{d^2x}{ds_1^2} = \frac{1}{R_1} \quad , \quad \sum X \cdot \frac{d^2x}{ds_2^2} = \frac{1}{R_2} .$$

Die Ableitungen einer beliebigen Funktion f von u und v nach den Bogenlängen s_1 und s_2 sind definiert durch die Gleichungen

$$\frac{df}{ds_1} = \frac{1}{2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}} \cdot \left(\frac{df}{d\sigma_1} - \frac{df}{d\sigma_2}\right) \quad , \quad \frac{df}{ds_2} = \frac{1}{2 \cdot \cos\frac{\varphi}{2}} \cdot \left(\frac{df}{d\sigma_1} + \frac{df}{d\sigma_2}\right) .$$

Es ist

$$d\frac{df}{ds_1} = \frac{1}{2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}} \cdot \left(\frac{d^2f}{d\sigma_1^2} - \frac{d^2f}{d\sigma_2 d\sigma_1}\right) + \frac{df}{ds_1} \cdot 2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{d\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}}{d\sigma_1} ,$$

$$d\frac{df}{ds_1} = \frac{1}{2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}} \cdot \left(\frac{d^2f}{d\sigma_1 d\sigma_2} - \frac{d^2f}{d\sigma_2^2}\right) + \frac{df}{ds_1} \cdot 2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{d\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}}{d\sigma_2} ,$$

$$d\frac{df}{ds_2} = \frac{1}{2 \cdot \cos\frac{\varphi}{2}} \cdot \left(\frac{d^2f}{d\sigma_1^2} + \frac{d^2f}{d\sigma_2 d\sigma_1}\right) + \frac{df}{ds_2} \cdot 2 \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{d\frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}}{d\sigma_1} ,$$

$$d\frac{df}{ds_2} = \frac{1}{2 \cdot \cos\frac{\varphi}{2}} \cdot \left(\frac{d^2f}{d\sigma_1 d\sigma_2} + \frac{d^2f}{d\sigma_2^2}\right) + \frac{df}{ds_2} \cdot 2 \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{d\frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}}{d\sigma_2} .$$

Mit Hilfe dieser Formeln findet man:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{-m}{2 \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2}} \quad , \quad \frac{1}{R_2} = \frac{m}{2 \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2}} ,$$

weshalb m positiv oder negativ ist, ja nachdem R_1 negativ oder positiv ist. Aus $-\frac{R_2}{R_1} = \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$ ergibt sich:

$$(18) \qquad \cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{-R_2}{R_1 - R_2}} \quad , \qquad \sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{R_1}{R_1 - R_2}} \quad ,$$

wo die Wurzeln positiv zu nehmen sind. Endlich folgt

$$(19) \qquad m = -\frac{2}{R_1 - R_2} .$$

A. Demoulin[32] hat wohl als erster die Liesche F_2 auf das aus den Tangenten der Krümmungslinien und der Flächennormale gebildete Koordinatensystem bezogen, dabei aber die Krümmungslinien als Parameterkurven vorausgesetzt. Die obige Gleichung ist im Gegensatz dazu an kein bestimmtes Netz von Parameterlinien auf der Grundfläche gebunden, ihre Verwendbarkeit im Einzelfall also erheblich größer.

Die Transformation unserer Gleichung (17) auf die Hauptachsen liefert kein einfach deutbares Ergebnis. Da hingegen erkennt man sofort, daß die U, V, W-Achsen selbst mit den Hauptachsen zusammenfallen[33], wenn $\frac{1}{h_1} = \frac{1}{h_2} = 0$ ist. Da jetzt μ=const., besitzt die Ausgangsfläche konstantes negatives Krümmungsmaß. Hier erhalten wir die Gleichung:

$$(20) \qquad \frac{U^2}{R_1} + \frac{V^2}{R_2} + \frac{R_1 + R_2}{2 \cdot R_1 \cdot R_2} \cdot W^2 - 2 \cdot W = O .$$

Im allgemeinen ergibt sich ein einschaliges Hyperboloid; nur an solchen Punkten, für die $R_1 + R_2 = 0$, tritt ein hyperbolisches

[32] Siehe Anm. 3: Seite 566.

[33] Ebenda Seite 666, Fußnote: Demoulin weist hier auf die symmetrische Lage der Lieschen Fläche zu den Normalebenen der Krümmungslinien hin.

Paraboloid auf. Um ein Beispiel zu behandeln, legen wir als Ausgangsfläche die Pseudosphäre zugrunde. Sie läßt sich durch die Gleichungen darstellen:

$$x = a \cdot \sin u \cdot \cos v \ , \quad y = a \cdot \sin u \cdot \sin v \ , \quad z = a \cdot \left(\log \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right)^{34}.$$

Hier ist

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a \cdot \cos u \cdot \cos v \ , \quad \frac{\partial y}{\partial u} = a \cdot \cos u \cdot \sin v \ , \quad \frac{\partial z}{\partial u} = a \cdot \frac{\cos^2 u}{\sin u} \ ,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = - a \cdot \sin u \cdot \sin v \ , \quad \frac{\partial y}{\partial v} = a \cdot \sin u \cdot \cos v \ , \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0 \ ,$$

sodaß für die Richtungskosinus der Normalen folgt, wenn wir uns auf den oberen Teil der Pseudosphäre ($\cos u < o$) beschränken:

$$X = \cos v \cdot \cos u \quad , \quad Y = \sin v \cdot \cos u \quad , \quad Z = - \sin u \ .$$

Die Gleichung der Asymptotenlinien ist:

$$d u^2 - \sin^2 u \cdot d v^2 = 0 \ .$$

Nehmen wir für die Asymptotenlinien (σ_1): $\frac{dv}{du} = - \frac{1}{\sin u}$, so kommt:

$$\frac{dx}{d\sigma_1} = (\cos u \cdot \cos v + \sin v) \cdot \sin u \ , \quad \frac{dy}{d\sigma_1} = (\cos u \cdot \sin v - \cos v) \cdot \sin u,$$

$$\frac{dz}{d\sigma_1} = \cos^2 u \ ,$$

$$\frac{dx}{d\sigma_2} = (\cos u \cdot \cos v - \sin v) \cdot \sin u \ , \quad \frac{dy}{d\sigma_2} = (\cos u \cdot \sin v + \cos v) \cdot \sin u \ .$$

$$\frac{dz}{d\sigma_2} = \cos^2 u \ ,$$

[34] „v. L." II_1 S. 176.

$\cos \varphi = \cos 2u$, $\sin \varphi = -\sin 2 \cdot u$. Jetzt wird:

$$\frac{dy}{d\sigma_1} \cdot \frac{dz}{d\sigma_2} - \frac{dy}{d\sigma_2} \cdot \frac{dz}{d\sigma_1} = X \cdot \sin \varphi \ ,$$

sodaß die Kurven (σ_1) und (σ_2) richtig orientiert sind.

Man hat nun: $A_1 = \dfrac{\dfrac{dx}{d\sigma_1} - \dfrac{dx}{d\sigma_2}}{2 \cdot \sin u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial v}$ usw., d. h., die Krümmungslinien mit der Bogenlänge s_1 fallen mit den Kurven $u = \text{const.}$ zusammen, und es wird:

$$R_1 = -a \cdot \operatorname{cotg} u \ , \quad R_2 = a \cdot \operatorname{tg} u \ , \quad R_1 + R_2 = -2 \cdot \operatorname{cotg} 2u \ .$$

Die Gleichung der Lieschen F_2 läßt sich in die Form setzen:

$$\frac{U^2 \cdot 2 \cdot \cos^2 u}{a} - \frac{V^2 \cdot 2 \cdot \sin^2 u}{a} + \frac{W^2 \cdot \cos 2u}{a^2} + 2 \cdot W \cdot \sin 2u = 0.$$

Verfolgen wir diese Fläche längs eines Meridians, so ergibt sich für $u = \dfrac{\pi}{2}$: $V = 0$, $W = 0$, d. h., hier artet die Fläche in die Tangente der Kante aus. Dann folgen bei wachsendem u einschalige Hyperboloide. Bei $u = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}$ tritt ein Paraboloid auf. Dann folgen wieder Hyperboloide bis für $u = \pi$ ($U = 0$, $W = 0$, $A_2 = 0$, $C_2 = 0$) eine Ausartung in die Drehungsachse der Pseudosphäre vorliegt.

§ 11. Bedingung für das Auftreten eines Paraboloids als Liescher F_2.

Zu der Gleichung (17) der Lieschen F_2 gehört die Determinante dritten Grades:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} & 0 & \frac{1}{m\cdot\sin\frac{\varphi}{2}}\cdot\left(\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_1}\right) \\ 0 & \frac{-1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} & \frac{-1}{m\cdot\cos\frac{\varphi}{2}}\cdot\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right) \\ \frac{1}{m\cdot\sin\frac{\varphi}{2}}\cdot\left(\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_1}\right) & \frac{-1}{m\cdot\cos\frac{\varphi}{2}}\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right) & \frac{-4}{m^2}\cdot\left(\frac{1}{h_1\cdot h_2}+k\right) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4\cdot k}{m^2\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,.$$

Aus ihr folgt, daß einem Flächenpunkte nur dann ein Liesches Paraboloid zugeordnet ist, wenn für ihn die Bedingung erfüllt ist:

$$(21)\qquad k \equiv \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\sigma_2} - \frac{2}{h_1\cdot h_2} - \left(\frac{1}{h_1^2}+\mu^2\right)\cdot\cos\varphi = 0\,.$$

Wir fragen nach dem geometrischen Gehalt dieser analytischen Forderung. Die Bedingung, unter der die Gleichung (12) ein Paraboloid ist, wird durch die Beziehung:

$$(22)\qquad \frac{1}{h_1}\cdot\frac{d\mu}{d\sigma_2} - \mu\cdot\frac{d\frac{1}{h_1}}{d\sigma_2} - \frac{1}{\sin\varphi}\cdot\left(\frac{1}{P_2}-m\cdot\cos\varphi\right)\cdot\left(\frac{1}{h_1^2}+\mu^2\right) = 0$$

dargestellt. Zu dieser Gleichung führt auch der Ansatz:

$$c_1\cdot\frac{dx}{d\sigma_1} + c_2\cdot\frac{dy}{d\sigma_1} + c_3\cdot\frac{dz}{d\sigma_1} = 0\,,$$

wo c_1, c_2, c_3 von der Bogenlänge σ_2 unabhängig sind; denn genügen wir ihm durch Richtungskosinus

$$c_1 = \frac{\frac{1}{h_1}\cdot X + \mu\cdot\frac{dx}{d\sigma_3}}{\omega}\,,\ \text{usw.},\qquad \omega = \left(\mu^2+\frac{1}{h_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

für welche

$$\frac{dc_1}{d\sigma_2} = O = \frac{1}{w^2}\left\{\omega \cdot \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\sigma_2} \cdot X - \frac{1}{h_1} \cdot \left(m \cdot \frac{dx}{d\sigma_1} + \tau \cdot \frac{dx}{d\sigma_3}\right) + \frac{d\mu}{d\sigma_2} \cdot \frac{dx}{d\sigma_3}\right.$$

$$\left. + \mu \cdot \left(\frac{1}{T_2} \cdot \frac{dx}{d\sigma_1} + \tau \cdot X\right)\right] - \frac{dw}{d\sigma_2} \cdot \left[\frac{1}{h_1} \cdot X + \mu \cdot \frac{dx}{d\sigma_3}\right]\Bigg\}, \text{ usw., so folgt:}$$

$$w^2 \cdot \sum X \cdot \frac{dc_1}{d\sigma_2} = \omega \cdot \left(\frac{d\frac{1}{h_1}}{d\sigma_2} + \mu \cdot \tau\right) - \frac{1}{h_1} \cdot \frac{d\omega}{d\sigma_2} = O,$$

$$w^2 \cdot \sum \frac{dx}{d\sigma_1} \cdot \frac{dc_1}{d\sigma_2} = -\frac{m}{h_1} + \frac{\mu}{T_2} \equiv O,$$

$$w^2 \cdot \sum \frac{dx}{d\sigma_3} \cdot \frac{dc_1}{d\sigma_2} = w \cdot \left(-\frac{\tau}{h_1} + \frac{d\mu}{d\sigma_2}\right) - \mu \cdot \frac{d\omega}{d\sigma_2} = O.$$

Die erste und dritte Gleichung ergibt nach Multiplikation mit der Wurzel ω die Gleichung (22). Umgekehrt folgt aus dem Bestehen der Gleichung (22), daß $\frac{dc_1}{d\sigma_2} = \frac{dc_2}{d\sigma_2} = \frac{dc_3}{d\sigma_2} = O$ ist. Da die Kurven (σ_1) und (σ_2) willkürlich angenommen sind, resultiert der Satz: Regelflächen sind paraboloidisch, wenn sie eine Leitebene besitzen. — Zu dem nämlichen Schluß führt bei entsprechender Überlegung auch die von den Tangenten der Kurven (σ_2) längs einer Kurve (σ_1) gebildete geradlinige Fläche. An Stelle der Gleichung (22) hat man hier:

$$(23) \qquad \frac{1}{h_2} \cdot \frac{d\mu}{d\sigma_1} - \mu \cdot \frac{d\frac{1}{h_2}}{d\sigma_1} - \frac{1}{\sin\varphi} \cdot \left(\frac{1}{P_1} - m \cdot \cos\varphi\right)\left(\frac{1}{h_2^2} + \mu^2\right) = O.$$

Da aber die Gleichungen (22) und (23) für den besonderen Fall der Asymptotenlinien als Kurven (σ_1) und (σ_2) in die Bedingung

(21) übergehen, läßt sich sagen: Bei paraboloidischen Flächen sind die von den Punkten einer Asymptotenlinie aus gezogenen Tangenten an die Asymptotenlinien der anderen Schar einer festen Ebene parallel. Hat umgekehrt eine Fläche diese Eigenschaft, so ist sie paraboloidisch[35].

---

[35] Dieser Satz rührt von P. Franck her. Er hat ihn in der Abhandlung: Über die paraboloidischen Flächen. — Jahresber. der dtschen. Math. Vereinigung, 23 (1914) — nachgewiesen und aus ihm den auf voriger Seite gewonnenen Satz gefolgert.

Lebenslauf.

Am 10. April 1898 wurde ich, Anna Maria Schmücker, katholischer Konfession, als Tochter des Post-Amtmanns, Rechnungsrats Heinrich Schmücker und seiner Frau Maria, geb. Hohmann in St. Tönis geboren. Ich besuchte bis Ostern 1914 das Ursula-Lyzeum zu Düsseldorf, sodann das Städtische Ober-Lyzeum daselbst, an dem ich 1917 die Reifeprüfung ablegte, und das ich Ostern 1918 mit dem Zeugnis der Lehrbefähigung für Lyzeen verließ. Darauf studierte ich in Münster i. W. mit dreisemestriger Unterbrechung Mathematik, Physik und Erdkunde.